

1 Modello meccanico del FLYCONPOWER[®]

1.1 Ipotesi di lavoro

Le ipotesi di lavoro che si introducono sono necessarie per la semplificazione del problema in oggetto senza tuttavia perdere di rigore e di validità scientifica. In particolare nel seguito si assumerà valide le seguenti:

- *Principio di sovrapposizione degli effetti*: si considerano separati i costituenti del sistema e se ne somma l'effetto; questa ipotesi permette di considerare in prima approssimazione il solo gruppo rotante costituito da cono+volano+cilindretti;
- *Sistema di riferimento inerziale*: il sistema rotante di cui sopra viene riferito ad un sistema di riferimento inerziale, per cui è valida la legge oraria del moto circolare uniforme
- *Organi flessibili ideali*: la fune è considerata inestensibile, priva di peso e di attriti interni.
- *Organi di trasmissione ideali*: le carrucole (pulegge) in cui viene fatta scorrere la corda sono prive di fenomeni dissipativi (non oppongono resistenza al passaggio della corda e non si surriscaldano localmente), inoltre, almeno in un primo momento verrà trascurato l'attrito al perno e il relativa perdita di energia. Anche i cuscinetti a spinta assiale che sostengono il complesso rotante sono considerati privi di attrito.
- *Ipotesi del continuo (di Cauchy)*: la forza torcente non produce né rotture né compenetrazioni, ma solo rotazioni del corpo solido cui è applicata; in tal modo è garantita l'assenza di distorsioni nella sezione cui viene applicata la suddetta forza.
- *Principio della conservazione del momento angolare*: il momento angolare \vec{L} di un sistema è costante nel tempo se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono su di esso.
- *Principio della conservazione dell'energia*: quantità totale di energia di un sistema isolato è una costante, ovvero il suo valore si mantiene immutato al passare del tempo.

1.2 Cinematica del FLYCONPOWER[®]

La cinematica del FLYCONPOWER[®] è ricavabile trascurando le parti del macchinario che non concorrono allo sviluppo della resistenza utile e tralasciando gli organi di trasmissione; ciò che rimane è il corpo rigido rotante costituito dall'insieme cono+volano+cilindretti e tale sistema è analizzabile con le ipotesi semplificative di moto circolare uniformemente accelerato e moto circolare uniforme applicate come descritte nel seguito.

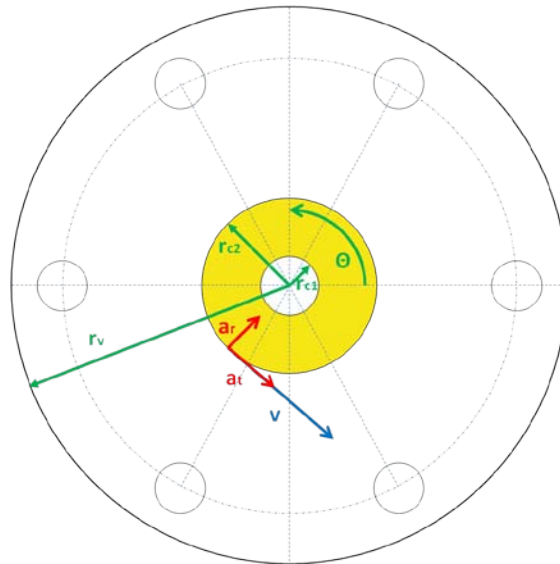


Figura 1 – Diagramma in pianta del sistema rotante

L'accelerazione che viene impressa al sistema rotante si scompone in due contributi, uno tangenziale a_t e uno radiale a_r (detta anche accelerazione centripeta); in linguaggio vettoriale, si può esprimere con le:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{r}(t)] = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}(t) + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (1)$$

da cui,

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r}(t) \quad (2)$$

$$|\vec{a}_t| = r\dot{\omega}(t) \quad |\vec{a}_n| = \omega^2 r \quad (3)$$

La legge oraria riportata in coordinate polari per il moto circolare uniformemente accelerato, inoltre, afferma che:

$$\vartheta(t) = \int_{t_0}^t \omega(t) dt = \int_{t_0}^t (\omega_0 + \dot{\omega}t) dt = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2 \quad (4)$$

Dalla (2) e dalla (3), nota l'accelerazione impressa dalla corda e supponendo in prima approssimazione un trasferimento di tale valore in modulo con rendimento unitario (caso ideale), si può scomporre tale valore nei due contributi, radiale (accelerazione centripeta) a_r e tangenziale a_t e dal valore di quest'ultima, con la legge oraria risalire alla velocità angolare del corpo rotante.

Per studiare la cinematica di un sistema così complesso occorre suddividere e identificare gli **use case**¹ tipici:

- **Stroke² con sistema in quiete**: si ha quando l'utente per la prima volta attiva (o riattiva) il macchinario partendo da una situazione di riposo in cui la corda è arrotolata sul cono se non in tutta la lunghezza, almeno in una quota parte sufficiente ad esprimere una spinta completa.

Il corpo rotante al tempo iniziale $t_0 = 0$ è in condizione di quiete ed ha velocità angolare iniziale e spostamento angolare nulli $\omega_0 = 0$; $\vartheta_0 = 0$; per cui la velocità angolare dopo il primo *stroke* (azionamento) segue la

$$\omega(t) = \dot{\omega}t \quad (5)$$

Dopo uno *stroke*, mentre la corda viene srotolata e nuovamente arrotolata dalla rotazione del cono, il sistema rotante ha accumulato una velocità angolare e, se lasciato imperturbato, si trova in una condizione di moto uniforme; a questo punto ci sono diverse possibilità di azione da parte dell'utente. Tipicamente, il comportamento atteso è l'*opposizione di una leggera resistenza* tale da mantenere la corda in tensione senza fermare completamente il moto del macchinario, ma egli può decidere di *opporsi totalmente al moto, non fare nulla* o una combinazione personale di queste tre azioni.

¹ Uno use case è la definizione organica di un caso tipico e significativo.

² Dall'inglese: colpo, fase, vogata; questo termine viene utilizzato in letteratura per indicare un gesto sportivo impulsivo (ad es. una bracciata nel nuoto libero).

- **Mantenimento in tensione della corda:** si traduce nel proporre al sistema una accelerazione opposta al verso di rotazione, di modulo di poco superiore al valore dell'accelerazione centripeta.

A regime il sistema si muove a velocità angolare costante con

$$\omega'_0 = \dot{\omega}_s \cdot t_s = \text{cost} \quad (6)$$

dove:

$\dot{\omega}_s$ = accelerazione data dalla trazione e

t_s = tempo di tiro (da una frazione di secondo a poco più di un secondo).

Questa decelerazione costante porta il sistema nuovamente in condizione di moto uniformemente accelerato ed è possibile stimare a quale velocità angolare si giunga prima dello stroke successivo.

- **Opposizione totale al moto:** l'utente esercita una decelerazione atta a sfruttare tutta la resistenza utile data dall'energia cinetica accumulata nel volano in seguito allo stroke. Così facendo rallenta e ferma il moto rotatorio (per semplicità si introduce l'ipotesi che tale decelerazione sia costante e di modulo elevato, ma non impulsiva). Questo corrisponde a ridurre la lunghezza della corda impegnata nella rotazione, ma è ottenibile solo dopo il passaggio da srotolamento ad arrotolamento.
- **Corda libera:** la velocità angolare non incrementa, la corda cade ai piedi del cono e viene avvolta producendo un richiamo impulsivo verso l'utente inattivo quando la distanza mano-punto di rotolamento è minimizzata. Questa è la condizione a più alto potenziale di rischio e verrà analizzata in dettaglio quando si parlerà di interfaccia biomeccanica.
- **Stroke con inversione di rotazione:** dopo il primo gesto, al termine del ciclo di srotolamento e avvolgimento della corda, l'utente si trova nella condizione di dover eseguire nuovamente un gesto impulsivo. La velocità di angolare di rotazione è in questo contraria alla verso di rotazione proposto dalla nuova accelerazione imposta dall'utente. Sia $t''_0 = 0$ dove t''_0 è il tempo in cui l'utente effettua il nuovo stroke, si rintracciano due situazioni, dipendenti dall'interazione dell'utente:

- *Rotazione non smorzata* (situazione di corda libera): la velocità angolare è in buona approssimazione quella raggiunta con lo stroke precedente, cioè $\omega'' = \omega(t_0'') = \omega_0'$. Trascurando il contraccolpo, per imporre un'inversione di rotazione occorre fornire un'accelerazione in grado di fermare il moto del sistema rotante e farlo ripartire nel verso opposto. Supponendo che l'accelerazione producibile dall'azione dell'utente (stroke) sia costante, ci si accorge che la velocità angolare ottenibile è inferiore della precedente a meno di non aumentare il tempo di tiro (quindi la lunghezza della corda che viene fatta srotolare dall'utente mettendola in tensione con la sua forza). Quel che accade nella realtà è invece una brusca decelerazione (ottenuta ai danni delle strutture biologiche) che porta la velocità angolare ad un valore molto basso e quindi lo stroke con inversione di moto in questa condizione ha una perdita di efficienza effettiva comunque, ma meno visibile.
- *Rotazione leggermente smorzata*: mantenendo la corda in trazione, la leggera decelerazione che viene esercitata dall'utente porta ad una progressiva riduzione della velocità angolare secondo la:

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}_d t_d \quad (7)$$

Pertanto in nuovo stroke avviene in una condizione di leggero svantaggio rispetto a quello della condizione da fermo, ma questo svantaggio può essere recuperato in modo armonioso aumentando la trazione a seguito di uno stroke particolarmente lungo (in termini di tempo supponendo costante l'accelerazione prodotta) e una trazione minore per uno stroke più breve.

- *Rotazione completamente smorzata*: quando l'utente applica una decelerazione atta a fermare il sistema rotante ci si ritrova nella situazione di stroke con sistema in quiete. In questo caso però occorre verificare che l'utente non abbia arrestato il sistema con la corda completamente srotolata, situazione dalla quale non è possibile ripartire se non con un avvio manuale della rotazione.

1.3 Dinamica del FLYCONPOWER[®]

La dinamica del FLYCONPOWER[®] si innesta sulla base di quanto visto per la cinematica; gli *use cases* considerati sono gli stessi.

La forza espressa dall'utente viene trasmessa al cono in modo diretto tramite la fune; l'inclinazione che quest'ultima realizza nel tratto tra la carrucola e la superficie del cono stesso influenza il modulo del momento che si applica al sistema rotante in due modi concomitanti;

- **Scomposizione della forza agente sul piano verticale frontale:** la forza F_s ha direzione congiungente la carrucola e la superficie contro cui è tenuta premuta (condizione necessaria per la trasmissione del moto, poiché solo in questo caso è possibile realizzare uno scambio di forze tra utente e sistema rotante). Supponendo che lo scambio tra fune e cono sia a rendimento unitario, la direzione della forza ha una componente verticale non nulla che viene annullata nei cuscinetti a spinta assiale come reazione vincolare³. Il verso di tale forza è rivolto verso l'asse orizzontale immaginario che la carrucola crea con il cono. La quota parte di forza che viene effettivamente trasferita al cono per iniziare il moto rotatorio è quindi la sola componente orizzontale:

$$T_s = F_s \cdot \cos \beta \quad (8)$$

dove β è l'angolo che la corda⁴ forma con la verticale passante per la carrucola (cfr. fig. 4a).

- **Variazione del braccio della forza sul piano orizzontale:** la forma conica promuove la presenza di bracci di forza differenti in relazione al punto di applicazione della forza; in particolare, tanto maggiore è la distanza del punto d'applicazione dal centro del cono, tanto maggiore sarà il braccio della forza traente di torsione T_s .

Il fatto che le direzioni delle forze traenti siano indirizzate verso un *punto di collimazione* rappresentato dal canale collettore di scorrimento della carrucola interviene a complicare ulteriormente la situazione (cfr. fig. 4b).

³ Approssimazione funzionale alla trattazione.

⁴ Si fa notare che la corda coincide con la direzione della forza esercitata.

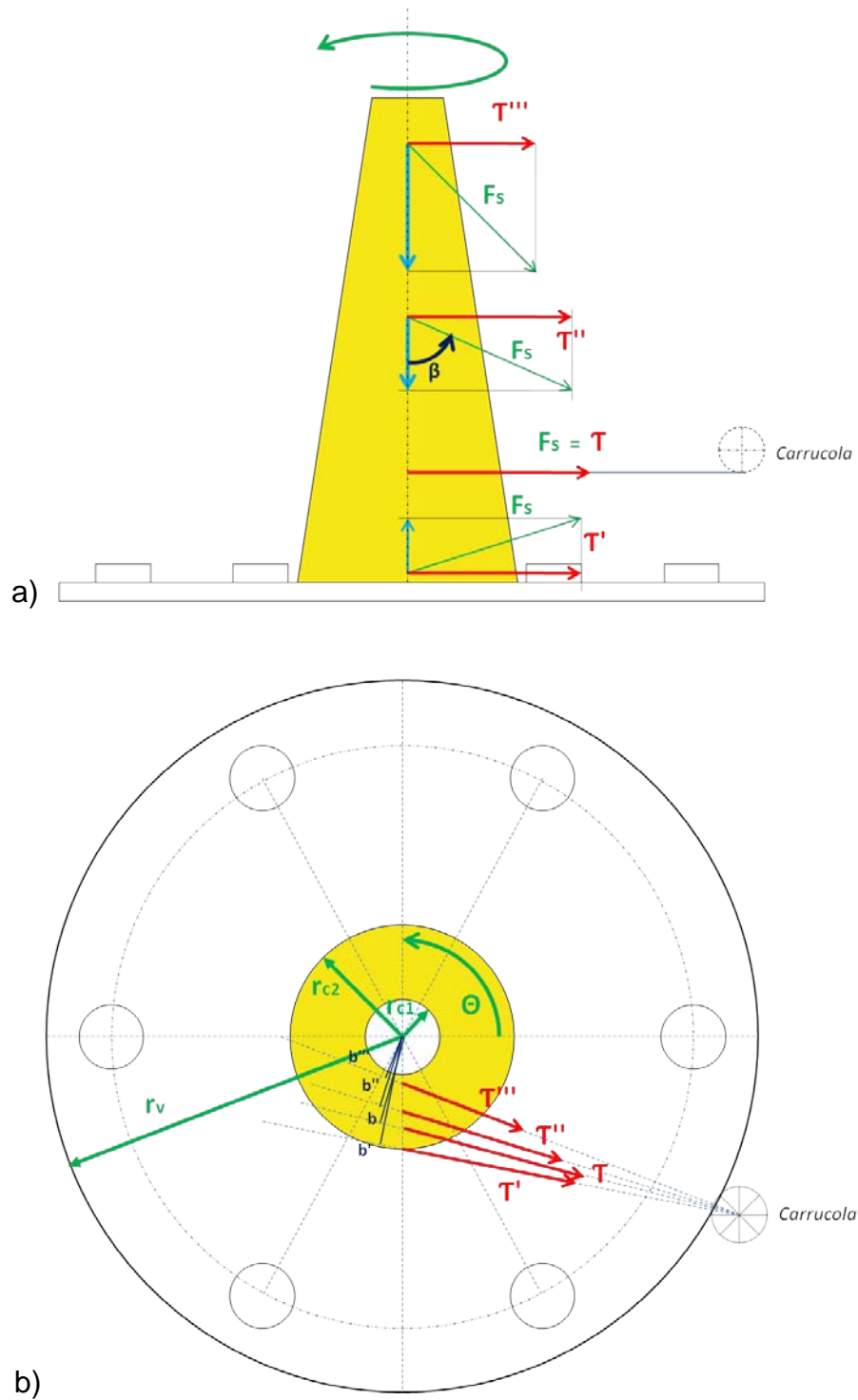


Figura 2 – Diagramma delle forze sul piano verticale (a) e orizzontale (b)

In questa configurazione, i bracci delle forze dipendono oltre che dalla distanza dal centro anche dall'angolo γ : se la carrucola è allineata in modo da ottenere la corda disposta in modo perfettamente tangenziale,

l'angolo è $\gamma = \frac{\pi}{2}$ da cui il braccio b riferito alla forza agente è massimizzato⁵; spostando la carrucola da tale posizione, ad esempio allontanandola verso l'esterno, si ottiene una riduzione dell'angolo γ e la conseguente riduzione del braccio b (fig 5) secondo la:

$$b' = b \cdot \sin \gamma \quad (9)$$

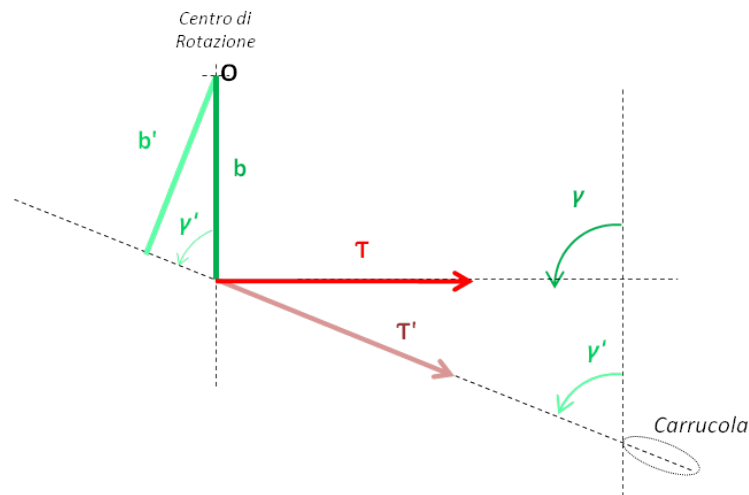


Figura 3 – Variazione del braccio al cambiare dell'angolo di attacco

Siccome $0 < \sin \gamma < 1$, risulta chiaro che $b' \leq b$ ed è uguale solo per $\gamma = \frac{\pi}{2}$, che è proprio la condizione di tangenza.

Da quanto detto consegue che all'allontanarsi della carrucola dalla linea di mezzeria del sistema rotante sul piano orizzontale, corrisponde una perdita di efficienza dell'accumulo energetico da parte del volano.

Se il sistema è in quiete⁶ la forza F_s espressa dall'utente, dopo essere stata scomposta come visto sopra e trasformata in T_s , produce una rotazione nel verso del momento creato dalla forza. Le forze relative alla massa e alle reazioni normali (dei vincoli di sostegno) sono in equilibrio. All'istante $t_0 = 0$ la forza di torsione fa iniziare il moto con la:

$$M_s = T_s \cdot b' \quad (10)$$

⁵ La forza che l'utente esprime ha il suo massimo effetto sulla rotazione del cono poiché a parità del modulo della forza espressa e del punto di applicazione, la direzione tangenziale è tale da massimizzare il braccio.

⁶ Corrisponde a considerare il F_s primo use case definito per la cinematica: "stroke con sistema in quiete".

L'energia cinetica accumulata dal volano a questo punto dipende non solo dalla T_s , istantanea, ma da tutte le sollecitazioni che vengono date dallo svolgersi della corda inseguito al tiro. Si può a questo punto introdurre un'ipotesi semplificativa immaginando che la forza espressa dall'utente sia costante su tutta la lunghezza della corda che egli riesce a tirare⁷ e a tal proposito si può immaginare il momento finale come una sommatoria di contributi istantanei.

$$\mathbf{M}_{tot} = \int_{t_0}^{t_s} \mathbf{M}_s dt = \int_{t_0}^{t_s} \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{b}'(t) dt \quad (11)$$

La funzione $\mathbf{b}'(t)$ rappresenta la variazione che il braccio subisce con lo srotolarsi della corda; essa è una complessa funzione della posizione verticale del punto di applicazione di T_s e dell'angolo istantaneo che si forma con il canale collettore della carrucola. Essendo le variazioni del braccio contenute⁸, in prima approssimazione si può considerare $\mathbf{b}'(t) \cong \mathbf{b}' = cost$, da cui:

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_{tot} = (\mathbf{T}_s \cdot \mathbf{b}') \cdot (t_s - t_0) = (\mathbf{T}_s \cdot \mathbf{b}') \cdot t_s \quad (12)$$

La quantità trovata è assimilabile al momento angolare del sistema rotante e siccome esistono le:

$$\mathbf{T}_s = \frac{d\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} \quad (13)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (14)$$

dove L è il momento angolare, e I è il momento di inerzia del sistema rotante, è possibile risalire all'energia cinetica E_k dalla:

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^2 \quad (15)$$

Dopo uno *stroke*, il volano ha un'accelerazione $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ed ha accumulato un'energia cinetica E_k , che verrà restituita in modi diversi dipendenti dagli use case e quindi dalla reazione dell'utente.

⁷ In realtà è facile ipotizzare che l'andamento della forza espressa non sarà costante su tutto il tratto di corda tirato, ma molto probabilmente seguirà un andamento iperbolico, che significa una forza esplosiva iniziale e un decadimento esponenziale fino ad un valore minimo. Per introdurre tuttavia questa raffinazione del modello, occorre una campagna sperimentale per misurare questo andamento e soprattutto occorre verificare che la strategia iperbolica sia sufficientemente standard, perché non è detto che l'andamento iperbolico sia adottato da tutti indiscriminatamente; qualcuno potrebbe preferire dar più forza a fine del movimento).

⁸ La strategia di srotolamento non è completamente prevedibile a priori, tuttavia si è osservato che la variazione del punto di applicazione in un singolo stroke è contenuto, quindi la semplificazione è legittima.

Momento di inerzia del sistema rotante: la caratteristica del sistema rotante che più influisce sul comportamento della macchina FLYCONPOWER® è senza dubbio il suo *momento di inerzia* I ; il momento d'inerzia di un corpo che ruota attorno ad un'asse è una misura della resistenza che esso oppone a mutare della sua velocità rotazionale, questa grandezza tiene conto di come è distribuita la massa del corpo attorno all'asse di rotazione e dà una misura dell'inerzia del corpo rispetto alle variazioni del suo stato di moto rotatorio. In questo caso il calcolo di tale grandezza è complicato dalla geometria composta da elementi solidali l'un l'altro e dalla presenza di elementi eventualmente sostituibili (pesetti laterali).

Il momento d'inerzia totale è composto dalla somma dei momenti d'inerzia degli elementi:

$$I = I_c + I_d + I_p \quad (16)$$

con I_c momento d'inerzia del cono, I_d momento d'inerzia del disco (o volano) e I_p momento di inerzia dei pesetti.

- Disco: il disco ha massa m_d , raggio interno r_1 e raggio esterno r_2 ; maggiore sarà la distanza tra la massa e il centro maggiore sarà il momento di inerzia (e più efficace sarà l'accumulo di energia cinetica).

$$I_d = \frac{1}{2} \cdot m_d (r_1^2 + r_2^2) \quad (17)$$

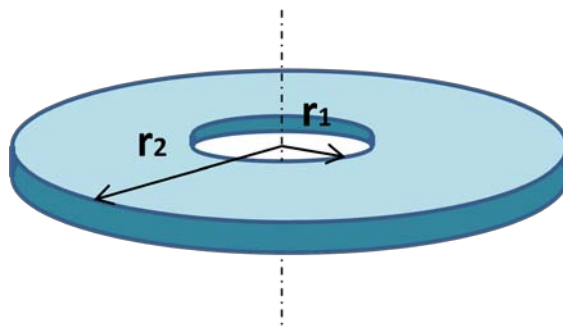


Figura 4 – Momento di inerzia del disco

- Cono: il cono merita un discorso più approfondito; tra le caratteristiche che influiscono sul momento di inerzia si trova la massa e questa è funzione anche del tipo di materiale adottato. Nel disco si ipotizza a buon

titolo che la massa m_d sia relativa ad un materiale omogeneo (acciaio), con caratteristiche ben definite; per il cono invece ci si trova a dover ricavare il momento di inerzia di una figura innanzitutto tronca e in secondo luogo costituita di due differenti materiali, acciaio all'interno e polimero all'esterno. Questi due materiali, oltre ad avere proprietà meccaniche differenti, hanno anche densità e volumi differenti, per cui masse e geometrie diverse e contribuiscono in modo differente all'inerzia del corpo. La procedura adottata è la seguente:

- Calcolo dell'inerzia del cono completo ipotizzando sia costituito completamente di materiale polimerico cui viene sottratto l'inerzia del cono interno (immaginandolo in materiale polimerico)
- Calcolo dell'inerzia del cono interno in acciaio; questo viene addizionato al precedente.
- Per rifinire il modello, si ripetono le operazioni su elencate per la parte non fisicamente presente relativa al tronco di cono (cono residuo in cima) e si sottrae l'inerzia risultante alla somma precedente.

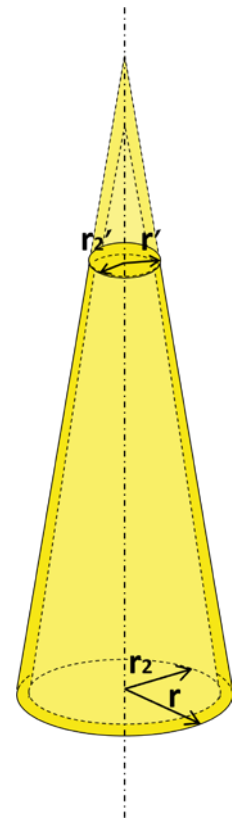


Figura 5 – Momento di inerzia del cono

Traducendo in formule quanto detto, si ha:

$$I_c = \left(\frac{3}{10} m_{ep} r^2 - \frac{3}{10} m_{ip} r'^2 + \frac{3}{10} m_{ia} r'^2 \right) - \left(\frac{3}{10} m_{epsup} r'^2 + \right. \\ \left. - \frac{3}{10} m_{ipsup} r'^2 + \frac{3}{10} m_{iasup} r'^2 \right)$$

esprimendo le masse in termini di densità per volume e riordinando:

$$I_c = \frac{\pi}{10} \{ [\delta_p (h_e r^4 - h_i r^4_2) + \delta_a h_i r^4_2] [\delta_p (h_{es} r'^4 - h_{is} r'^4_2) + \delta_a h_{is} r'^4_2] \}$$

con δ_p e δ_a rispettivamente densità del materiale polimerico e dell'acciaio utilizzato, h_e , h_i , h_{es} e h_{is} rispettivamente altezza del cono esterno, interno esterno superiore ed interno superiore (questi ultimi due fanno riferimento al piccolo cono che si ottiene troncando il cono principale).

Per finire, la figura centrale oltre ad essere un tronco di cono, alloggia in altro un cilindro metallico (in prima approssimazione considerato dello stesso materiale del cono interno, quindi uguale densità δ_a) sul quale viene fissata la corda; definendo con h_c l'altezza del cilindretto metallico e osservando che esso si innesta sul tronco di cono metallico, l'espressione finale del momento d'inerzia di questo elemento è quindi:

$$I_c = \frac{\pi}{10} \{ [\delta_p (h_e r^4 - h_i r^4_2) + \delta_a h_i r^4_2] [\delta_p (h_{es} r'^4 - h_{is} r'^4_2) + \delta_a h_{is} r'^4_2] \} + \frac{\pi}{2} \delta_a h_c r'^4_2 \quad (18)$$

- Pesetti: i pesetti sono 6 masse uguali per materiale forma e dimensioni poste ad una distanza fissa r (uguale per tutte gli elementi); il momento di inerzia di questi pesetti è dato dalla somma dei loro effetti, quindi:

$$I_p = 6m_p r^2 \quad (19)$$

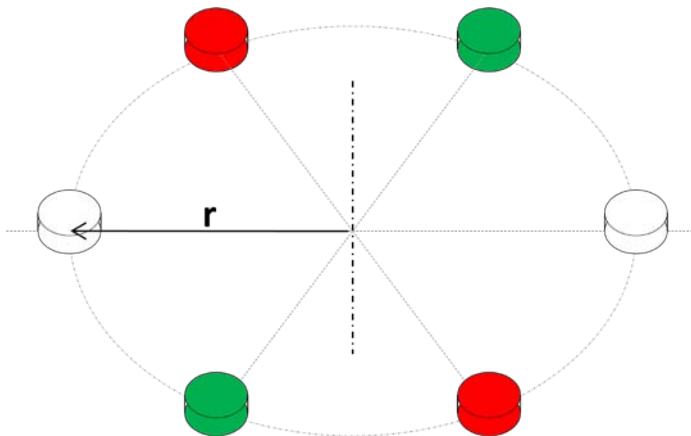


Figura 6 – Momento di inerzia dei pesetti

Da questa relazione appare chiaro come giochi un ruolo primario la distanza dal centro di rotazione (asse di simmetria del sistema rotante); maggiore è la distanza maggiore è l'effetto di questi pesetti sull'inerzia totale del sistema e quindi sulla sua capacità di accumulare l'energia sotto forma di rotazione.

2 Quantificazione approssimata dell'attrito

Le forze d'attrito giocano un ruolo centrale in questo macchinario; il contributo di queste alla possibilità di ottenere il moto del sottosistema rotante è evidente e intuitivo. Diventa pertanto interessante capire meglio come si comportano.

Le forze di attrito agiscono in modo tangenziale sulle superfici a contatto e si oppongono al moto relativo tra le due; è noto sperimentalmente ed è largamente condiviso che la forza resistente (attrito) F_f è proporzionale alla forza normale F_n agente sulla superficie secondo la:

$$F_f = \mu F_n$$

Con μ coefficiente di attrito.

Le forze resistenti passive sono forze che contrastano il lavoro delle macchine, dando luogo a *lavoro passivo*, cioè a dissipazione di energia sotto forma di calore (aumento della temperatura) o tramite asportazione di materia (logoramento), visibile sul materiale gommoso del cono.

Una quota parte dell'energia in entrata al sistema viene utilizzata per piegare la corda, che ha una sua resistenza interna e, dunque, non è disponibile in uscita al sistema; tale resistenza è **direttamente proporzionale al quadrato del diametro ed è inversamente proporzionale al raggio di avvolgimento**, perciò, per diminuire queste resistenze occorre **usare corde o cinghie quanto più sottili e carrucole quanto più grandi**.

2.1 Equazione della legge dell'attrito di Capstan

Nel caso del FLYCONPOWER[®] l'attrito cui ci si riferisce è senza dubbio quello tra corda e superficie del cono; esso gioca principalmente 2 ruoli: mantenere aderente la corda al tamburo (cono) per azione della forza normale dovuta alla tensione fornita dall'utente e modulare la tensione fornita all'utente al termine della fase di arrotolamento.

Nel caso specifico di attrito tra corda e tamburo si fa riferimento alla equazione di Capstan:

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \quad (20)$$

dove μ è il coefficiente di attrito della corda e β è l'angolo totale di contatto tra corda e cono (fig 6)

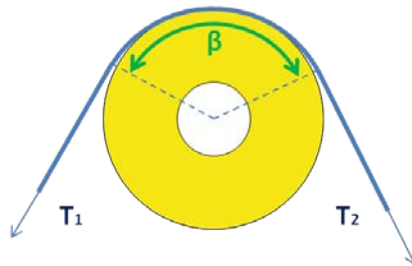


Figura 7 – Diagramma illustrativo dell'equazione di Capstan

2.2 Attrito al perno

I perni sono corpi cilindrici ruotanti dentro sedi aventi diametro appena superiore ai perni stessi. La differenza fra i due diametri si definisce “gioco”; in assenza di gioco e di lubrificazione il perno “grippa”, cioè si blocca nella sua sede.

Il perno può essere:

- Portante: sopporta un carico normale al proprio asse;
- Spingente: il carico è incidente all'asse del perno.

Nel caso del FLYCONPOWER[®] le pulegge sono entrambe a perno spingente.

Si può allora scrivere il momento di attrito dei perni:

$$M_r = N \cdot r \cdot \sin \vartheta \quad (21)$$

Dove N = forza premente (peso del perno + carico sullo stesso) r = raggio del perno e ϑ = angolo di attrito.

Poiché M_r è direttamente proporzionale al diametro del perno, per diminuire il suo valore occorrono perni piccoli e ben lubrificati.